Florin Stănescu

Inegalități integrale

Probleme de calcul integral

Ediție substanțial adăugită

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

ENUNȚURI

Capitolul A. Funcții pozitive. Funcții monotone. Funcții convexe

Breviar teoretic

- Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă și $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)dx\geq 0.$
- Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții integrabile cu proprietatea că $f(x)\leq g(x), x\in[a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x).$
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă și este îndeplinită condiția $m\leq f(x)\leq M,(\forall)x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci este integrabilă și $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx.$
- Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar $[c,d]\subset[a,b]$, atunci $\int_c^d f(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx.$
- Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este integrabilă pe $[a,b]$ și există $x_0\in[a,b]$ în care f este continuă cu $f(x_0)>0$, atunci $\int_a^b f(x)dx>0.$
- **Inegalitatea lui *Cebâșev*:** Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții având aceeași monotonie, iar $p:[a,b]\to[0,\infty)$, o funcție integrabilă. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right).$$

În cazul când f şi g sunt de monotonii diferite, avem:

$$\left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\right) \leq \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right).$$

Punând $p(x)=1, (\forall)x \in [a,b]$, obținem:

a) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$, dacă f și g au aceeaşi monotonie;

b) $(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$, dacă f și g sunt de monotonii diferite;

Egalitatea are loc dacă una din funcţiile f,g este constantă (cu excepția, eventual, a unei mulțimi numărabile).

- **Inegalitatea lui *Jensen*:** Fie $f: I \to J, g: J \to \mathbb{R}$ două funcţii continue.

a) Dacă g este convexă, atunci $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx$;

b) Dacă g este concavă, atunci $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx$.

Egalitatea are loc dacă f este constantă.

- **Inegalitatea *Hermite-Hadamard*:** Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi convexă, atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

- **Inegalitatea lui *Young*:** Fie $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie continuă, strict crescătoare, astfel încât $f(0)=0$. Atunci $(\forall)a \geq 0$ și

$b \in f(\mathbb{R}_+)$, avem $ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$, egalitatea obținându-se dacă și numai dacă $b = f(a)$.

- **Teorema de medie:** Dacă f este continuă pe $[a,b]$, g integrabilă pe $[a,b], g(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$, atunci există $c \in [a,b]$, astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

- **Teorema de medie (a doua formulă):** Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcții cu următoarele proprietăți:
  i. f este continuă pe $[a,b]$;
  ii. $g(a) \ge 0$, g descrescătoare pe $[a,b]$.

Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx$.

- ***(Weierstrass):*** Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcții cu următoarele proprietăți:
  i. f este continuă pe $[a,b]$
  ii. g monotonă pe $[a,b]$.

Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$.

- Considerăm I un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă. Atunci au loc următoarele proprietăți:

P_1) Pentru pentru orice $x, y \in I$ și $\alpha, \beta \in [0,1]$, cu $\alpha + \beta = 1$, avem $f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y)$.

P_2) Pentru orice $a \in I$, funcția $r_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $r_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, este crescătoare.

P_3)

i. Dacă $x<y<z$, atunci $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$;

ii. Dacă $x<y<z$, atunci $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$;

P_4)

i. Notăm $a=\inf I$ și $b=\sup I$. Atunci f este derivabilă lateral pe I și pentru orice $t_1,t_2\in(a,b)$, cu $t_1<t_2$ avem:

$f_s'(t_1)\le f_d'(t_1)\le f_s'(t_2)\le f_d'(t_2)$.

ii. Se observă că derivatele laterale sunt funcții crescătoare. Dacă $[a,b]$ este un interval inclus în I, și $u,v\in[a,b]$, cu $u<v$, atunci $-M\le f_d'(a)\le f_d'(u)\le\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}\le f_d'(v)\le f_s'(b)\le M$ unde $M=\max\{|f_d'(a)|;|f_s'(b)|\}$.

iii) $f(x)\ge f(x_0)+(x-x_0)f_d'(x_0),(\forall)x,x_0\in I$. În cazul în care f este de derivabilă pe I, atunci $f(x)\ge f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)$, $(\forall)x,x_0\in I$.

- Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică, de perioadă 1 și α un număr irațional. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\big(f(\alpha)+f(2\alpha)+...+f(n\alpha)\big)=\int_0^1 f(x)dx$.

- **Funcția beta**: Pentru $x>0,y>0,B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}t\cdot\cos^{2y-1}t$. Valori particulare: $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi,B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi,B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\pi\sqrt{2},B(x,1)=\frac{1}{x}$, $B(x,1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)},B(x,n)=$

$\dfrac{(n-1)!}{x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}, n\in\mathbb{N}^*$, $B(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, m,n\in\mathbb{N}^*$.

Teorema lui Fleet: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $[a,b]$ astfel încât $f'(a)=f'(b)$. Arătați că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^{(1)}$, atunci $$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)=-\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}.$$
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^{(2)}$, atunci: $$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)+\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}\right]=$$ $$\frac{-(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{12}.$$
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^{(1)}$, atunci: $$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right)\right)=\frac{(b-a)^2(f'(b)-f'(a))}{24}.$$
- **Teorema convergenței dominate:** Fie $M\geq 0, f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ un șir de funcții integrabile convergent (punctual) către o funcție integrabilă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $|f_n(x)|\leq M, (\forall)n\in\mathbb{N}, (\forall)x\in[a,b]$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)dx$.

Probleme rezolvate

R.A.1. Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(a)=f(b)=0$. Arătați că are loc inegalitatea:

$$\sup_{a\le t\le b} f(t) \le \frac{1}{2}\cdot\int_a^b |f'(x)|dx.$$

Soluție. Avem $|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|$ și $|f(x)| = \left|\int_x^b f'(t)\,dt\right|$, de unde

$2|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right| + \left|\int_x^b f'(t)\,dt\right| \le \int_a^x |f'(t)|dt + \int_x^b |f'(t)|dt =$

$\int_a^b |f'(x)|dx, (\forall)\, x\in[a,b]$. Astfel, $\sup_{a\le t\le b} f(t) \le \frac{1}{2}\cdot\int_a^b |f'(x)|dx$.

R.A.2. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu f' continuă pe $[a,b]$, demonstrați inegalitatea $0 \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b |f(x)|dx - \left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{3}\cdot\sup_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

Soluție. Avem $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$, deci $0 \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b |f(x)|dx -$ $\left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\right|$. Mai departe, vom calcula $\int_a^b f(x)dx + \int_a^x (t-a)f'(t)\,dt -$ $\int_x^b (b-t)f'(x)\,dt = \int_a^b f(x)dx + (x-a)f(x) - \int_a^x f(x)dx + (b-x)f(x) -$ $\int_a^x f(x)dx = (b-a)f(x)$, de unde obținem $|(b-a)f(x)| \le \left|\int_a^b f(x)\,dx +\right.$ $\left.\int_a^x (t-a)f'(t)\,dt - \int_x^b (b-t)f'(x)\,dt\right| \le \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \int_a^x (t-a)|f'(t)\,dt| +$ $\int_x^b (b-x)|f'(t)|\,dt$, rezultă $(b-a)\cdot\int_a^b |f(x)|dx - (b-a)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le$

$$\int_a^b\left(\int_a^x (t-a)\left|f'(t)\right|dt\right)dx+ +\int_a^b\left(\int_x^b (b-t)\left|f'(t)\right|dt\right)dx\le\frac{(b-a)^3}{3}\cdot\sup_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|,$$

ceea ce încheie demonstrația.

R.A.3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $\int_0^1 xf(x)dx=0$. Demonstrați inegalitatea $\left|\int_0^1 x^2f(x)\,dx\right|\le\frac{1}{6}\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|$.

Mathematical Reflections

Soluție. Cu ajutorul formulei de integrare prin părți, putem scrie:

$$\left|\int_0^1 x^2f(x)dx\right|=\left|\int_0^1 x\left(\int_0^x tf(t)dt\right)' dx\right|=\left|\int_0^1\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)dx\right|\le$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x t\left|f(t)\right|dt\right)dx\le\max_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|\cdot\int_0^1\left(\int_0^x tdt\right)dx= =\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|\cdot\int_0^1 x^2dx=$$

$$\frac{1}{6}\max_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|.$$

R.A.4. Fie M mulțimea funcțiilor $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabile cu $f(0)=0$ și $f(1)=1$. Demonstrați că $\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx\ge\frac{1}{e},\ (\forall)f\in M$.

S. Birăuș

Soluție. Cum $\left(e^{-x}f(x)\right)'=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right),(\forall)x\in[0,1]$, putem scrie $\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx=\int_0^1 e^x\left|\left(e^{-x}f(x)\right)'\right|dx\ge\int_0^1\left|\left(e^{-x}f(x)\right)'\right|dx\ge$

$$\left|\int_0^1\left(e^{-x}f(x)\right)dx\right|=\left|e^{-1}f(1)\right|=\frac{1}{e}.$$

R.A.5. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că:

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|.$$

Cezar Lupu

Soluție. Avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (x-a)' f(x)dx = (b-a)f(b) - \int_a^b (x-a)f'(x)dx,$

iar din teorema de medie există $c_1 \in (a,b)$ astfel încât $\int_a^b (x-a)f'(x)dx =$

$f'(c_1)\cdot\int_a^b (x-a)dx = f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{2}$, de unde

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{2}$. În mod analog, există

$c_2 \in (a,b)$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{2}$.

Astfel, inegalitatea de demonstrat devine:

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{8} - \left(b-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'(c_2)\frac{(b-a)^2}{8}\right| =$$

$$\frac{(b-a)^2}{8}\left|f'(c_1)+f'(c_2)\right| \le 2\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|\cdot\frac{(b-a)^2}{8} = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|.$$

R.A.6. Fie C mulțimea funcțiilor integrabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, astfel încât $0\le f(x)\le x$, oricare ar fi $x\in[0,1]$. Definim funcția $V:C\to\mathbb{R}$

Prin $V(f) = \int_0^1 f^2(x)dx - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2, f\in C$. Determinați următoarele mulțimii:

a) $\{V(f_a) \mid 0\le a\le 1\}$, unde $f_a(x)=0$, dacă $0\le x\le a$, și $f_a(x)=x$, dacă $a<x\le 1$.

b) $\{V(f) \mid f\in C\}$.

Soluție. a) $V(f_a)=\int_a^1 x^2dx-\left(\int_a^1 xdx\right)^2=\frac{1-a^3}{3}-\frac{(1-a^2)a^2}{4}$,

de unde $\max_{a\in[0,1]} V(f_a)=\frac{5(3-\sqrt{5})}{24}$, care se obține pentru $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Rezultă că $V(f_a)=\left[0,\frac{5(3-\sqrt{5})}{24}\right]$.

b) Fie $f\in C$. Vom arăta că există $a\in[0,1]$ astfel încât $V(f)\le V(f_a)$.

Fie $a=\sqrt{1-2\int_0^1 f(x)dx}\in[0,1]$. Avem $\int_0^1 f_a(x)dx=\frac{1-a^2}{2}=\int_0^1 f(x)dx$.

Mai departe, $V(f_a)-V(f)=\int_0^1\left((f_a(x))^2-(f(x))^2\right)dx=\int_0^1\big(xf_a(x)-$ $f(x))^2dx \underset{0\le f(x)\le x}{\ge} \int_0^1 x(f_a(x)-f(x))$. Notăm $g(x)=f_a(x)-f(x), x\in[0,1]$.

Dacă $0\le x\le a$, atunci $\int_x^1 g(t)dt=\int_x^1(f_a(t)-f(t))dt=\int_x^1 f_a(t)dt-$ $\int_x^1 f(t)dx\ge\int_0^1 f_a(t)dt-\int_0^1 f(t)dx=0$, iar pentru $a\le x\le 1$, avem $\int_x^1 g(t)dt=$ $\int_x^1(t-f(t))dx$. În final, cum $\int_0^1 xg(x)dx=\int_0^1\left(\int_x^1 g(t)dt\right)dx\ge 0\Rightarrow$

$\int_0^1 xg(x)dx=\int_0^1\left(\int_x^1 g(t)dt\right)dx\ge 0\Rightarrow V(f)\le V(f_a)\Rightarrow\{V(f)|f\in C\}=V(f_a)$.

R.A.7. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu f' mărginită pe $[0,1]$. Arătați că are loc inegalitatea $\frac{m^2}{12}\le\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le\frac{M^2}{12}$, unde $m=\inf\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$, iar $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$.

Dinu Șerbănescu

Soluție. Pentru $x,y\in[0,1]$, cu ajutorul teoremei lui *Lagrange,* există $c_{x,y}\in(\min(x,y),\max(x,y))$ astfel încât $(f(x)-f(y))^2=$ $(f'(c_{x,y}))^2(x-y)^2\Rightarrow m^2(x-y)^2\le(f(x)-f(y))^2\le M^2(x-y)^2\Rightarrow$

$$m^2\int_0^1\left(\int_0^1(x-y)^2dy\right)dx\le\int_0^1\left(\int_0^1(f(x)-f(y))^2dy\right)dx\le M^2\int_0^1\left(\int_0^1(x-y)^2dy\right)dx\Rightarrow$$

$$\frac{m^2}{6}\le 2\left(\int_0^1 f^2(x)dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\right)\le\frac{M^2}{6}.$$

R.A.8. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție integrabilă. Arătați că $\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f^2(x)dx\le\int_0^1 f^3(x)dx.$

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Din inegalitatea lui *Schur* de gradul *al III-lea*, avem:
$f^3(x)+f^3(y)+f^3(z)+3f(x)f(y)f(z)\ge f^2(x)f(y)+f^2(y)f(x)+$ $f^2(y)f(z)+f^2(z)f(y)+f^2(z)f(x)+f^2(z)f(y),(\forall)x,y,z\in[0,\infty)$, de unde prin integrare în funcție de cele trei variabile, obținem:

$$3\int_0^1 f^3(x)dx+3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3\ge 6\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)dx\underset{Jensen}{\Rightarrow}$$

$6\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)dx\le 6\int_0^1 f^3(x)dx$, ceea ce încheie demonstrația.

Notă: Dacă $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$, atunci pentru $\alpha,\beta>0$, $n-$uplurile $(x_1^\alpha,x_2^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)$ și $(x_1^b,x_2^b,\ldots,x_n^a)$ sunt de aceeași monotonie.
Aplicând inegalitatea lui *Cebâșev,* avem:

$$\frac{1}{n}\left(x_1^a+x_2^a+\ldots+x_n^a\right)\cdot\left(x_1^\beta+x_2^\beta+\ldots+x_n^\beta\right)\le\left(x_1^{\alpha+\beta}+x_2^{\alpha+\beta}+\ldots+x_n^{\alpha+\beta}\right).$$